<u>ΛΥΣΕΙΣ</u>

<u>ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2003</u>

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 232

Β. 1.Σ , 2.Σ , 3.Λ, 4.Λ, 5.Σ

Το 5 θέλει διευκρίνιση αν τα όρια είναι πραγματικοί αριθμοί ή όχι

ΘΕΜΑ 2ο

α.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2-3x}{x-2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x-3)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 0}\frac{x-3}{x-2} = \frac{0-3}{0-2} = \frac{3}{2}$$

β.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-1)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x}{x-2}-x+1\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x-x^2+2x+x-2}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{x-2} = \left(\frac{-2}{+\infty}\right) = 0$$

Οπότε η ευθεία $y = x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Άλλος τρόπος : Με το θεώρημα $\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$, $\beta = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)$

γ.

$$f\,'(x) = \frac{(2x-3)(x-2)-(x^2-3x)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+6}{(x-2)^2}$$

Επειδή η διακρίνουσα του τριώνυμου x^2-4x+6 είναι $\Delta = -8 < 0$, θα είναι $x^2-4x+6 > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Οπότε $f\,'(x) > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2\,,\,+\infty)$

ΘΕΜΑ 3ο

α.

$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} x^2 = 25$, $\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+}(10x-25) = 25$, $f(5) = 50-25 = 25$

Άρα $\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x) = f(5)$, οπότε η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_o = 5$.

β.

$$\lim_{x\to 5^-}\frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim_{x\to 5^-}\frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x\to 5^-}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x\to 5^-}(x+5) = 10$$

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim_{x\to 5^+}\frac{10x-25-25}{x-5} = \lim_{x\to 5^-}\frac{10(x-5)}{x-5} = 10$$

Αφού $\lim_{x\to 5^-}\frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim_{x\to 5^+}\frac{f(x)-f(5)}{x-5} = 10$, η συνάρτηση παραγωγίζεται στο $x_o = 5$ και μάλιστα ισχύει $f\,'(5) = 10$

γ.

Η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y - f(5) = f\,'(5)(x-5) \Leftrightarrow$

$$y - 25 = 10(x-5) \Leftrightarrow$$

$$y = 10x - 25$$

δ.

Είναι $f'(x) = \begin{cases} 2x\ , & \text{αν } x < 5 \\ 10\ , & \text{αν } x \geq 5 \end{cases}$

Πρόσημο της $f\,'$ και μονοτονία της f

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
$f\,'$		$-$	0	$+$	10	$+$	
f		$\searrow$	|		$\nearrow$		

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι : η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty\,,\ 0]$
επειδή είναι συνεχής στο $x_o = 5$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$
παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 0$ το $f(0) = 0$

ΘΕΜΑ 4ο

α.

$$w = \frac{i(i+z)}{i-z} = \frac{i(i+x+yi)}{i-x-yi} =$$

$$= \frac{i^2 + xi + yi^2}{-x+(1-y)i} =$$

$$= \frac{-1-y+xi}{-x+(1-y)i} =$$

$$= \frac{(-1-y+xi)[-x-(1-y)i]}{[-x+(1-y)i][-x-(1-y)i]} =$$

$$= \frac{2x + i - y^2 i - x^2 i}{x^2 + (1-y)^2} =$$

$$= \frac{2x}{x^2 + (1-y)^2} + \frac{1 - y^2 - x^2}{x^2 + (1-y)^2} i$$

β.

$w \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 - y^2 - x^2}{x^2 + (1-y)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x^2 - y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 1$

Άρα οι εικόνες του z ανήκουν στον κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$

γ.

$z \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y = 0$, οπότε $w = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1-x^2}{x^2+1} i$

Έστω $M(\kappa, \lambda)$ τυχαία εικόνα του w

Τότε $\kappa = \frac{2x}{x^2+1}$ και $\lambda = \frac{1-x^2}{x^2+1} \quad \Rightarrow$

$\kappa^2 = \frac{4x^2}{(x^2+1)^2}$ και $\lambda^2 = \frac{1 - 2x^2 + x^4}{(x^2+1)^2}$

Προσθέτουμε κατά μέλη : $\kappa^2 + \lambda^2 = \frac{4x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{1 - 2x^2 + x^4}{(x^2+1)^2} =$

$$= \frac{1 + 2x^2 + x^4}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(1+x^2)^2}{(x^2+1)^2} = 1$$

πράγμα που σημαίνει ότι το σημείο $M(\kappa, \lambda)$ βρίσκεται στον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$, δηλαδή οι εικόνες του w βρίσκονται στον κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.